Section 4 高次方程式

高次方程式

272－021－013

x の整式 $P(x)$ が n 次式のとき，方程式 $P(x)=0$ について考えてみましょう。一般的に，3 次以上の方程式を**高次方程式**といい，このセクションでは係数が実数の高次方程式について考えます。

2次方程式の解法は中学で学習しましたが，基本的には因数分解を行います。因数分解が難しい場合は解の公式を使って解きます。それでは 3 次方程式や 4 次方程式などの高次方程式はどのようにして解を求めればよいのでしょうか。高次方程式も，基本は因数分解を利用して解きます。3 次方程式や 4 次方程式にも解の公式はあるのですが，とても煩雑で記憶することは困難です。また，次数が 5 次以上の方程式には解の公式が存在しないことがわかっています。

Ex.1 次の方程式を解け。

(1) $x^3=-8$　　(2) $x^4-5x^2-36=0$

2次方程式の解と係数の関係について，§ 2 で確認をしました。3 次方程式における，解と係数の関係についても考えてみましょう。

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a \neq 0)$ …… ① の解を $x=\alpha, \beta, \gamma$ とすると，① は，

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

と因数分解することができます。② の左辺を展開すると，

$$ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma=0 \quad \cdots\cdots ③$$

となります。① と ③ の各項の係数は等しくなるので，

$$b=-a(\alpha+\beta+\gamma),\ c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\ d=-a\alpha\beta\gamma$$

が得られます。これより，3 次方程式における解と係数の関係が得られます。

解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a \neq 0)$ の 3 解を $x=\alpha, \beta, \gamma$ とすると，

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

3 乗根

272－021－014

2 乗して a になる数を a の平方根といいました。同じように，3 乗して a になる数，すなわち，方程式 $x^3=a$ の解を，a の **3 乗根（立方根）** といいます。

特に，1 の 3 乗根，すなわち $x^3=1$ の解については有名で，問われることが多くありますので，例題を通して確認しておきましょう。

《例 4—1》

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\omega^3+\omega^2+\omega$　　(2) $\omega^6+\omega^3+1$　　(3) $\omega^8+\omega^4$

〈準備〉

まず，$x^3=1$　…… ① を解く。

$$x^3=1 \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$x^2+x+1=0$ …… ③ を解くと，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

よって，$x^3=1$ の解は，$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

虚数解のうちの 1 つを ω とするので，

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \quad \text{または} \quad \omega=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

どちらにしても，ω は ③ の解であるので，$\omega^2+\omega+1=0$ を満たす。

また，ω は ① の解でもあるので，$\omega^3=1$ も満たす。

さらに，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると，

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき，

$$\omega^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

となり，ω を 2 乗した値はもう 1 つの虚数解と一致する。

以上より，次のことが成り立ちます。

> $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とすると，
> ①　$\omega^3=1$
> ②　$\omega^2+\omega+1=0$
> ③　$x^3=1$ の解は，$1,\ \omega,\ \omega^2$

これらを踏まえた上で，先の問題を解いてみましょう。

〈解答〉

(1)　$\omega^3+\omega^2+\omega=1+\omega^2+\omega=\omega^2+\omega+1=0$

〈別解〉

$$\omega^3+\omega^2+\omega=\omega(\omega^2+\omega+1)=\omega\cdot 0=0$$

(2)　$\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1=1^2+1+1=3$

(3)　$\omega^8+\omega^4=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega=1^2\cdot\omega^2+1\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

【25】 ◈ 272– 022 – 025

次の方程式を解け。

(1) $x^3-7x-6=0$

(2) $x^3-2x^2-x+2=0$

(3) $x^4+x^3-x^2+x-2=0$

(4) $3x^3-4x^2+26x+20=0$

【26】 ◈ 272– 022 – 026

$f(x)=x^3-Ax^2+Bx-1$ とする（ただし，A, B は実数)。方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解が α, β, γ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ を A, B を用いて表せ。

(2) $g(x)=x^3+Px^2+Qx+R$ とする。方程式 $g(x)=0$ が $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\gamma}$ を 3 つの解としてもつとき，P, Q を A, B を用いて表せ。また，$R=-1$ を示せ。

【27】 ◈ 272– 022 – 027

方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\omega^3+\omega^2+2\omega+2=a\omega+b$ とするとき，a, b の値を求めよ。

(2) 自然数 n に対し，$\omega^{2n}+\omega^n+1$ の値を求めよ。

(3) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ を簡単にせよ。

【28】 ◈ 272– 022 – 028

a, b を実係数とする方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解は $2+i$ である。このとき，残り 2 つの解を求めよ。また，a, b の値を求めよ。

【29】 ◈ 272– 022 – 029

$x=1+\sqrt{3}i$ のとき，

(1) $x^2-2x+4=0$ であることを示せ。

(2) $x^4-x^3+3x^2+4x+5$ の値を求めよ。

【30】 ◈ 272– 022 – 030

方程式 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ を解け。

演習問題
解答・解説

$P(x)$ を x^2-3x-4 で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると，

$P(x)=(x-4)(x+1)Q_1(x)+4x-1$

$P(x)$ を $2x^2-3x+1$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると，

$P(x)=(2x-1)(x-1)Q_2(x)+2x+7$

$2x^2-9x+4=(2x-1)(x-4)$ なので，$P(x)$ を $2x^2-9x+4$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$P(x)=(2x-1)(x-4)Q(x)+ax+b$

$P(4)=15$ より，$4a+b=15$ …… ①

$P\left(\frac{1}{2}\right)=8$ より，$\frac{1}{2}a+b=8$ …… ②

①，② を連立して解いて，$a=2$，$b=7$

よって，求める余りは，$\mathbf{2x+7}$

【24】 ❈ 272-022-024

(1)　整式 $f(x)$ は $x-1$ で割ると余りが 3 である。また，$f(x)$ を x^2+x+1 で割ると余りが $4x+5$ である。このとき，$f(x)$ を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　整式 $P(x)$ を $(x-3)^2$ で割った余りが $2x-5$ であり，$x-1$ で割った余りが 5 であるとき，$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割った余りを求めよ。

(1)　$f(x)$ を x^3-1 で割った商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c（a, b, c は実数）とおくと，

$$f(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ①$$

$f(x)$ を $x-1$ で割った余りが 3 であるから，剰余定理より，$f(1)=3$ が成り立つので，

$a+b+c=3$ …… ②

また，① から，$f(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは，ax^2+bx+c を x^2+x+1 で割った余りと等しい。

ax^2+bx+c を x^2+x+1 で割った余りは，$(b-a)x+c-a$

条件より，これが $4x+5$ と等しいから，係数を比較することで $b-a=4$，$c-a=5$ が成り立つことがいえるので，

$b=a+4$，$c=a+5$ …… ③

これを ② に代入して，

$a+(a+4)+(a+5)=3$

$\Leftrightarrow$ $a=-2$

これを ③ に代入して，$b=2$，$c=3$

したがって，求める余りは，$\mathbf{-2x^2+2x+3}$

〈別解〉

$f(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは $2x-5$ となるので，

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+2x-5$$

としてもよい。

(2)　$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，

$$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+ax^2+bx+c$$

$(x-1)(x-3)^2Q(x)$ は $(x-3)^2$ で割り切れるから，$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割った余りは，ax^2+bx+c を $(x-3)^2$ で割った余りと等しい。

$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割ると $2x-5$ 余ることから，

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2+2x-5$

よって，$P(x)$ は定数 a を用いて，

$$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+a(x-3)^2+2x-5$$

と表される。$x=1$ を代入して，

$P(1)=a(1-3)^2+2\cdot1-5=4a-3$

また，$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは 5 であるから，剰余定理より，$P(1)=5$

よって，

$4a-3=5$ $\Leftrightarrow$ $a=2$

したがって，求める余りは，

$2(x-3)^2+2x-5=\mathbf{2x^2-10x+13}$

Section 4　高次方程式

【25】 ❈ 272-022-025

次の方程式を解け。

(1) $x^3-7x-6=0$

(2) $x^3-2x^2-x+2=0$

(3) $x^4+x^3-x^2+x-2=0$

(4) $3x^3-4x^2+26x+20=0$

(1)　$P(x)=x^3-7x-6$ とする。

$P(-1)=0$ より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつので，

$$P(x)=(x+1)(x^2-x-6)$$
$$=(x+1)(x+2)(x-3)$$

よって，方程式の解は，$\mathbf{x=3,\ -1,\ -2}$

(2)　$P(x)=x^3-2x^2-x+2$ とする。

$P(1)=0$ より，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつので，

$$P(x)=(x-1)(x^2-x-2)$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)$$

よって，方程式の解は，$\mathbf{x=1,\ -1,\ 2}$

(3)　$P(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$ とする。

$P(1)=0$ より，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつので，

$$P(x)=(x-1)(x^3+2x^2+x+2)$$

$Q(x)=x^3+2x^2+x+2$ とすると，$Q(-2)=0$ より，$Q(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

したがって，

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+1)$$

よって，方程式の解は，$\boldsymbol{x=1,\ -2,\ \pm i}$

(4) $P(x)=3x^3-4x^2+26x+20$ とする。

$P\left(-\dfrac{2}{3}\right)=0$ より，$P(x)$ は $3x+2$ を因数にもつので，

$$P(x)=(3x+2)(x^2-2x+10)$$

よって，方程式の解は，$\boldsymbol{x=-\dfrac{2}{3},\ 1\pm 3i}$

【26】 ※ 272−022−026

$f(x)=x^3-Ax^2+Bx-1$ とする（ただし，A, B は実数）。方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解が α, β, γ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ を A, B を用いて表せ。

(2) $g(x)=x^3+Px^2+Qx+R$ とする。方程式 $g(x)=0$ が $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$ を 3 つの解としてもつとき，P, Q を A, B を用いて表せ。また，$R=-1$ を示せ。

(1) 解と係数の関係より，

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=A}$$
$$\boldsymbol{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=B}$$
$$\alpha\beta\gamma=1$$

(2) 解と係数の関係より，

$$\begin{aligned}P&=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\\&=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\&=-\frac{B}{1}=\boldsymbol{-B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q&=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\\&=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\\&=\frac{A}{1}=\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}R&=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\\&=-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1\end{aligned}$$ ■

【27】 ※ 272−022−027

方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\omega^3+\omega^2+2\omega+2=a\omega+b$ とするとき，a, b の値を求めよ。

(2) 自然数 n に対し，$\omega^{2n}+\omega^n+1$ の値を求めよ。

(3) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ を簡単にせよ。

(1) $x^3=1$ より，$\omega^3=1$ …… ①

また，

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

ω は虚数なので，$\omega\neq 1$ であるから，

$$\omega^2+\omega+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より，

$$\begin{aligned}\omega^3+\omega^2+2\omega+2&=\omega^3+(\omega^2+\omega+1)+\omega+1\\&=\omega+2\end{aligned}$$

これが $a\omega+b$ となるので，$\boldsymbol{a=1,\ b=2}$

(2) m を 0 以上の整数とする。

$n=3m$ のとき，$\omega^n=(\omega^3)^m=1$

$n=3m+1$ のとき，$\omega^n=(\omega^3)^m\omega=\omega$

$n=3m+2$ のとき，$\omega^n=(\omega^3)^m\omega^2=\omega^2$

(i) $n=3m$ のとき

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=1+1+1=3$$

(ii) $n=3m+1$ のとき

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^2+\omega+1=0$$

(iii) $n=3m+2$ のとき

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$$

以上をまとめて，

$$\begin{cases} \omega^{2n}+\omega^n+1=\mathbf{3} & \boldsymbol{(n=3m)} \\ \omega^{2n}+\omega^n+1=\mathbf{0} & \boldsymbol{(n=3m+1,\ 3m+2)} \end{cases}$$

(3)　$(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^2+(ab+ca)\omega+(ab+bc+ca)\omega^2+(b^2+c^2)\omega^3+bc\omega^4$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

よって，

$$(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}$$

【28】 ❖ 272– 022 – 028

a, b を実係数とする方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解は $2+i$ である。このとき，残り 2 つの解を求めよ。また，a, b の値を求めよ。

$x=2+i$ より，$x-2=i$
両辺を平方して整理すると，

$$x^2-4x+5=0$$

よって，整数 p を用いて，

$$x^3+ax^2+bx+10$$
$$=(x^2-4x+5)(x+p)$$

と表せる。右辺を展開した式の定数項を比較して，$p=2$
よって，$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=-3}$
残りの 2 つの解は，$\boldsymbol{x=2-i,\ -2}$

【29】 ❖ 272– 022 – 029

$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，
(1)　$x^2-2x+4=0$ であることを示せ。
(2)　$x^4-x^3+3x^2+4x+5$ の値を求めよ。

(1)　$x=1+\sqrt{3}\,i$ から，$x-1=\sqrt{3}\,i$
両辺を 2 乗すると，$(x-1)^2=-3$ となるので，左辺を展開して整理して，

$$x^2-2x+4=0 \quad ■$$

(2)　$x^4-x^3+3x^2+4x+5$ を x^2-2x+4 で割ると，商は x^2+x+1，余りは $2x+1$ であるから，

$$x^4-x^3+3x^2+4x+5$$
$$=(x^2-2x+4)(x^2+x+1)+2x+1$$

よって，$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，与式の値は，

$$2(1+\sqrt{3}\,i)+1=\boldsymbol{3+2\sqrt{3}\,i}$$

【30】 ❖ 272– 022 – 030

方程式 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ を解け。

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ …… ① とする。
$x=0$ は ① の解でないから，$x\neq 0$
① の両辺を x^2 で割ると，

$$2x^2-5x+1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

よって，

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，

$$t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

したがって，② を t の方程式で表すと，

$$2(t^2-2)-5t+1=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2t^2-5t-3=0$$
$$\Leftrightarrow\ (2t+1)(t-3)=0$$

よって，$t=-\dfrac{1}{2},\ 3$

(i)　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}$ が成り立つので，

$$2x^2+x+2=0$$
$$\Leftrightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$$

(ii)　$t=3$ のとき

$x+\dfrac{1}{x}=3$ が成り立つので，

$$x^2-3x+1=0$$
$$\Leftrightarrow\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

(i)(ii) から，①の解は，

$$\boldsymbol{x=\frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4},\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$$